Ορισμός – Συμβολισμός

$\forall \nu \in \mathbb{N}$ θέτουμε $T(\nu) = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq \nu\}$

Τα σύνολα $T(\nu)$ λέγονται αρχικά τμήματα των φυσικών αριθμών

Σημείωση: Για το $T(\nu)$ χρησιμοποιείται κ' ο συμβολισμός $\{1, \dots, \nu\}$, αλλά θα τον αποφεύγουμε

$T(1) = \{1\}$

$T(2) = \{1, 2\}$

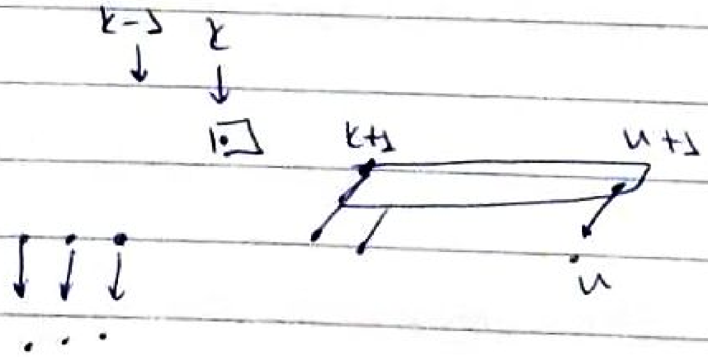
$T(3) = \{1, 2, 3\}$ κτλ.

Πρόταση: Αν $\nu \in \mathbb{N}$ κ' $\kappa \in T(\nu+1)$, τότε $T(\nu+1) - \{\kappa\} \simeq T(\nu)$

Απόδειξη: Ορίζουμε $f : T(\nu+1) - \{\kappa\} \to T(\nu)$ ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < \kappa \\ x-1, & x > \kappa \end{cases}$$

Η f εύκολα ελέγχεται ότι είναι 1-1 κ' επί



Πρόταση: $\forall n \in \mathbb{N}$ ∄ γν. υποσύνολο του $T(n)$ που να είναι ισοπληθικό με το $T(n)$

Ορισμός: Ένα σύνολο A λέγεται πεπερασμένο αν $A = \emptyset$ ή $\exists n \in \mathbb{N}$ $A \simeq T(n)$

πχ Το σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ είναι πεπερασμένο, διότι είναι ισοπληθικό με το $T(3) = \{1, 2, 3\}$
Επειδή η $f: A \to T(3)$
$f(\alpha) = 1, f(\beta) = 2, f(\gamma) = 3$ είναι 1-1 κ' επί

Παρατήρηση: Αν A είναι πεπερασμένο μη κενό σύνολο, τότε ∃ μοναδικός $n \in \mathbb{N}$ ώστε $A \simeq T(n)$

Απόδειξη: Από τον ορισμό ∃ (τουλάχιστον ένα) $n \in \mathbb{N}$ $A \simeq T(n)$
Αν $n, m \in \mathbb{N}$ $A \simeq T(n)$ $A \simeq T(m)$, τότε $T(n) \simeq T(m)$, άρα $n = m$

Ορισμός: Για ένα πεπερασμένο μη κενό σύνολο A το μοναδικό $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο $A \simeq T(n)$ τον ονομάζουμε πληθικό αριθμό του A κ' τον συμβολίζουμε $card(A)$

[χρησιμοποιούνται κ' οι συμβολισμοί $|A|, \#(A)$
$$A \simeq T(n) \iff card(A) = n$$
θα λέμε ότι το A έχει n στοιχεία]

Επίσης για $A = \emptyset$ γράφουμε $card(\emptyset) = 0$

Πρόταση: Έστω A, B πεπερασμένα σύνολα
(i) Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε το $A \cup B$ είναι πεπερασμένο κ' $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$

(ii) $card(A - B) = card(A) - card(A \cap B)$
(iii) $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$

Απόδειξη: (i) Αν $A=\emptyset$ ή $B=\emptyset$, τότε τα συμπεράσματα είναι προφανή.

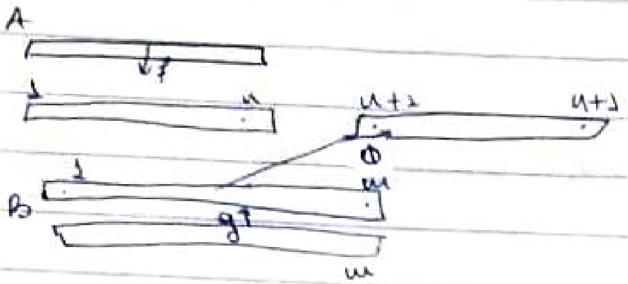
Υποθέτουμε ότι $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$.

Έστω $card(A)=\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$

$card(B)=\mu$, $\mu\in\mathbb{N}$

Έτσι $\exists\, f: A\to T(\nu)$ 1-1 κ' επί

$\exists\, g: B\to T(\mu)$ 1-1 κ' επί



Η συνάρτηση $\phi: T(\mu)\to\{x\in\mathbb{N}: \nu+1\le x\le \nu+\mu\}$

με τύπο $\phi(x)=x+\nu$

είναι όπως εύκολα βλέπουμε 1-1 κ' επί.

Ορίζουμε $f: A\cup B\to T(\nu+\mu)$

$$f(x)=\begin{cases} f(x), & x\in A \\ \phi(g(x)), & x\in B\end{cases}$$

Η f είναι κατά φανερά 1-1 κ' επί.

$card(A\cup B)=\nu+\mu=card(A)+card(B)$

(ii) $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ με τα σύνολα $A-B$, $A\cap B$ κ' είναι ξένα

(αφού $(A-B)\cap(A\cap B)=\emptyset$)

Από το (i) προκύπτει ότι

$card(A)=card(A-B)+card(A\cap B)$

Άρα $card(A-B)=card(A)+card(A\cap B)$

(iii) $A\cup B=(A-B)\cup B$

με τα $A-B$, B είναι ξένα

$card(A\cup B)=card(A-B)+card(B)=card(A)-card(A\cap B)$

$+card(B)=$

$= card(A) + card(B) - card(A \cap B)$

<u>Πόρισμα</u>: Η ένωση <u>πεπερασμένου</u> πλήθους πεπερασμένων συνόλων είναι πεπερασμένο σύνολο.

<u>Απόδειξη</u>: Από την προηγούμενη πρόταση με επαγωγή.

<u>Πόρισμα</u>: Αν A, B είναι δύο πεπερασμένα σύνολα, τότε το $A \times B$ είναι πεπερασμένο με $card(A \times B) = card(A) \cdot card(B)$

<u>Απόδειξη</u>: Αν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$ είναι προφανές.

Υποθέτουμε ότι $\exists\, n, m \in \mathbb{N}$

$$A \simeq T(n),\ B \simeq T(m)$$

Έστω $f : A \to T(n)$ 1-1 κ' επί

$g : B \to T(m)$ 1-1 κ' επί

Ορίζουμε $F : A \times B \to T(nm)$

$$F((a,b)) = (f(a) - 1)m + g(b)$$

Αποδεικνύεται ότι η F είναι καλά ορισμένη, 1-1 κ' επί.

Άρα $A \times B \simeq T(nm)$

Άρα $card(A \times B) = card(A) card(B)$

<u>Πόρισμα</u>

Αν $n \in \mathbb{N}$ κ' $(A_i)_{i=1}^{n}$ πεπερασμένα σύνολα, τότε το

$A_1 \times \dots \times A_i$ είναι πεπερασμένο

$card(A_1 \times \dots \times A_n) = card(A_1) \cdots card(A_n)$

<u>Απόδειξη</u>: Με επαγωγή

1) $a,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε $a<\beta+\varepsilon$ $\forall \varepsilon>0$. Ν.δ.ο $a \leq \beta$

<u>Απόδειξη</u>: Με απαγωγή σε άτοπο. Αν δεν ισχύει $a \leq \beta$, τότε $a>\beta$.
Άρα $a-\beta>0$. Για $\varepsilon=a-\beta>0$ από την υπόθεση προκύπτει ότι
$a<\beta+(a-\beta)$, άρα $a<a$ άτοπο.
Επομένως $a \leq \beta$

2) A πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$
Να εξετάσετε πότε έχει $\sup A=\inf A$

<u>Απόδειξη</u>: Αν το A είναι μονοσύνολο $A=\{x\}$, τότε $\sup A=x=\inf A$
Αν το A έχει δύο τουλάχιστον στοιχεία ώστε $a,\beta \in A$ με $a<\beta$,
τότε $\inf A \leq a<\beta \leq \sup A$, άρα $\inf A<\sup A$

3) A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $a<\beta$ $\forall a \in A$ κ $\forall \beta \in B$
Ν.δ.ο $\sup A \leq \inf B$
Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\sup A<\inf B$;

<u>Απόδειξη: $\forall \beta \in B$</u> έχουμε τα εξής:
$\forall a \in A$ ισχύει $a<\beta$, άρα το β είναι α.φ. του A, άρα $\sup A \leq \beta$

Άρα ο αριθμός $\sup A$ είναι κ.φ. του συνόλου B. Συνεπώς $\sup A \leq \inf B$
Αν $A=(0,1)$, $B=(1,2)$ ισχύει η υπόθεση για τα A, B όμως $\sup A=1=\inf B$.

4) $A=\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ Ν.δ.ο $\inf A=0$
<u>Απόδειξη:</u>
(i) Καταρχάς $0 \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, συνεπώς το 0 είναι κ.φ. του A

(ii) Έστω $\varepsilon>0$, τότε $\frac{1}{\varepsilon}>0$. Από την αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών
$\exists n \in \mathbb{N}$, ώστε $\Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon$

Από τα (i), (ii) προκύπτει ότι $\inf A=0$

5) Έστω A, B δύο φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.
Αν $\forall a \in A$ $\exists b \in B$ ώστε $a < b$
Ν.δ.ο. $\sup A \leq \sup B$
Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\sup A < \sup B$;

Απόδειξη: Αρκεί ν.δ.ο. ο αριθμός $\sup B$ είναι α.φ. του A.
Έστω $a \in A$
Από υπόθεση $\exists b \in B$ $a < b$ κ' αφού $b \leq \sup B$ θα ισχύει $a < \sup B$.
Άρα ο αριθμός $\sup B$ είναι α.φ. του A. Επομένως, $\sup A \leq \sup B$

Για $A = B = (0, 1)$ ισχύει η υπόθεση αλλά $\sup A = \sup B = 1$

6) (Α) $p \in \mathbb{R}$
$A = \{t \in \mathbb{Q} \; t < p\}$
Ν.δ.ο. $\sup A = p$

Απόδειξη (α) $\forall t \in A$ ισχύει $t < p$, άρα το p είναι α.φ. του A

β) Έστω $\varepsilon > 0$, τότε $p - \varepsilon < p$. Από την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς
$\exists t \in \mathbb{Q}$ με $p - \varepsilon < t < p$
Επειδή $t \in \mathbb{Q}$ κ' $t < p$ έχουμε $t \in A$, ενώ $t > p - \varepsilon$

Άρα από (α) κ' (β) $\sup A = p$

(Β) $p \in \mathbb{R}$ $B = \{t \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \; t > p\}$
Ν.δ.ο. $\inf B = p$

Απόδειξη
(α) $\forall t \in B$ ισχύει $t > p$, άρα το p είναι κ.φ. του B.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$, τότε $p < p + \varepsilon$. Από την πυκνότητα των αρρήτων στους πραγμ-
τικούς $\exists t \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ με $p < t < p + \varepsilon$

Εφόσον $t \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ κ' ισχύει $t>\rho$ θα έχουμε $t \in B$, ενώ ισχύει $t<\rho+\varepsilon$

Από τα (α) κ' (β) $\inf B=\rho$.